ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Део први

12. јун 2013

Професор: Игор Долинка — Асистент: Бојан Башић

1. Нека је S непразан скуп чији су сви елементи прости бројеви, и нека је испуњено: за све $p, q \in S$ (не обавезно различите) сви прости фактори броја $pq + 1$ такође су у скупу S. Доказати да првих пет простих бројева припадају скупу S.

2. У скупу природних бројева решити једначину

$$x! + 76 = y^2.$$

   Једна идеја: Показати да је, за све довољно велике x, лева страна једначине по погодно одабраном модулу конгруентна с одређеним бројем, а да потпун квадрат по посматраном модулу никада није конгруентан с тим бројем. Остале случајеве испитати директно.

3. Нека су $n_1 = a_1^2 t_1$ и $n_2 = a_2^2 t_2$ природни бројеви, при чему бројеви t_1 и t_2 нису дељиви ниједним потпуним квадратом већим од 1. Доказати: ако $n_1 \mid n_2$, тада $a_1 \mid a_2$.

ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Део други

12. јун 2013

Професор: Игор Долинка — Асистент: Бојан Башић

1. Израчунати $o_{142}(17)$.

2. За уочене $a, b \in \mathbb{N}$, поставимо хипотезу: „Постоји бесконачно много $n \in \mathbb{N}$ таквих да је $d(n) = d(n + a) = b$“, где $d(n)$ означава број делилаца природног броја n. Одредити бар један пар бројева $a, b \in \mathbb{N}$ за који је наведена хипотеза еквивалентна хипотези о простим близанцима.

3. Нека је k фиксиран природан број, и нека је n природан број који се може представити као збир квадрата два цела броја, узимајући у обзир и поредак, на тачно $4k$ начина. Доказати: k је непаран број акко је n или потпун квадрат, или двоструки потпун квадрат.